Bac Blanc 4h

Exercice 1. 6 **points COMMUN A TOUS LES CANDIDATS** $\boxed{\textbf{TS1-TS2-TS3}}$

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ puis que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.
Indication : Pour cela on pourra dresser le tableau des variations de la fonciton g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

3. En utilisant le résultat précédent et en posant $X = -x$ montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

Partie B : Etude d'une première fonction.

On appelle f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.

3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Etude d'une deuxième fonction.

On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

1. Montrer que F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$.

2. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

Exercice 2. 5 points **COMMUN A TOUS LES CANDIDATS** **TS1-TS2-TS3**

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0; 80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, la probabilité de choisir un cube avec une face marquée d'un cercle est 0.4 , la probabilité de choisir un cube avec une face marquée d'un losange est 0.2. Les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, la probabilité de choisir un cube avec une face marquée d'un cercle est 0.2, la probabilité de choisir un cube avec une face marquée d'un losange est x. Les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,4x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 0.5$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard successivement et avec remise 3 cubes de l'urne. On suppose que le nombre de cubes est suffisant pour supposer ces tirages indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cubes rouges parmi les 3 cubes obtenus.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Donner la loi de probabilité de X. Justifier.
2. Quelle est la probabilité de tirer un seul cube rouge ?
3. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
4. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

Attention, sur cette page, tous les élèves de TS1 et TS3 traiteront l'exercice 3
Les TS2 traiteront l'exercice 4

Exercice 3. 4 **points COMMUN A TOUS LES CANDIDATS de** $\boxed{\textbf{TS1-TS3}}$

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.Ce cube est donné en annexe.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1;\dfrac{1}{3};0\right)$, $\mathrm{J}\left(0;\dfrac{2}{3};1\right)$, $\mathrm{K}\left(\dfrac{3}{4};0;1\right)$ et $\mathrm{L}(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ;1].
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A :

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}$ $,t'\in\mathbb{R}$
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a=\dfrac{1}{4}$.

PARTIE B :

Dans la suite de l'exercice, on pose $a=\dfrac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4};1;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Construire sur la figure donnée en annexe la section du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH

Exercice 4. 4 **points COMMUN A TOUS LES CANDIDATS de** $\boxed{\textbf{TS2}}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives
$$a=-3-\mathrm{i},\quad b=-2+4\mathrm{i},\quad c=3-\mathrm{i},\quad h=-2$$
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC. G est le centre de gravité du triangle, c'est à dire le point d'intersection des médianes de ABC.
On admet également que : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
4. Soit g l'affixe du point G. Montrer que $g=\dfrac{a+b+c}{3}$.
5. En déduire la valeur de g puis placer G sur la figure.
6. Montrer que G, H et J sont alignés. Le vérifier sur la figure.
7. On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$.
Le point A' a pour affixe $a'=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
   a. Déterminer l'affixe du point K.
   b. Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

Exercice 5. 5 points CANDIDATS N'AYANT PAS CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE **TS1-TS2-TS3**

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul $b (b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Compléter le tableau donné en annexe, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n > 0 \text{ et } v_n > 0$$

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n \leqslant v_n$$

3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2.
   En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 6. 5 points CANDIDATS AYANT CHOISI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE **TS1-TS2-TS3**

On note 0, 1, 2, ..., 9,α, β, les « chiffres »de l'écriture d'un nombre en base 12.Par conséquent α, β représentent respectivement les chiffres 10 et 11 en base 12.
Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. **a.** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1131$$

i. Déterminer les entiers a, b et c appartenant à $[0; 11]$ tels que

$$N_2 = 144a + 12b + c$$

ii. En déduire l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. **a.** Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. **a.** Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

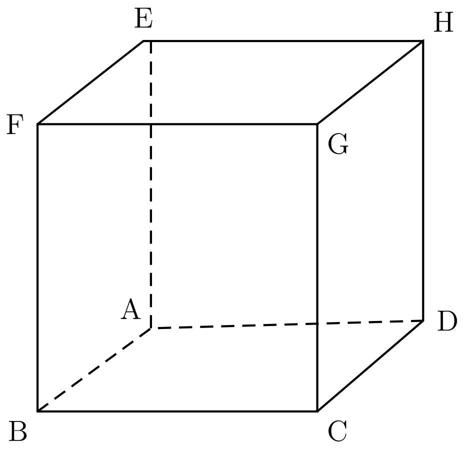
b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est simultanément divisible par 3 et 11.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 3



EXERCICE 4

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				